

**CH.29 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES**

Plan (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

CH.29 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES	1
I. LES POSTULATS DE L'ELECTROMAGNETISME.....	2
I.1. LOI DE FORCE DE LORENTZ.....	2
I.2. LES EQUATIONS DE MAXWELL.....	2
I.3. CONTENU PHYSIQUE DES EQUATIONS DE MAXWELL.....	2
I.3.1. Maxwell-Gauss (M.G).....	2
I.3.2. Maxwell-flux (M. Φ).....	2
I.3.3. Maxwell-Faraday (M.F).....	2
I.3.4. Maxwell-Ampère (M.A).....	3
I.4. RELATIONS DE PASSAGE.....	3
II. EQUATIONS LIEES AUX POTENTIELS.....	3
II.1. CHAMPS EN FONCTION DES POTENTIELS.....	3
II.2. CHOIX D'UNE JAUGE.....	3
II.3. SOLUTION DES POTENTIELS RETARDES.....	4
III. PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE.....	4
III.1. APPROCHE QUALITATIVE.....	4
III.2. EQUATION DE PROPAGATION DANS LE VIDE.....	5
III.3. SOLUTIONS PARTICULIERES DE L'EQUATION DE D'ALEMBERT.....	5
III.3.1. Onde plane.....	5
III.3.2. Onde sphérique.....	6
IV. ONDE PLANE PROGRESSIVE ELECTROMAGNETIQUE.....	6
IV.1. CAS PARTICULIER D'UNE ONDE MONOCHROMATIQUE.....	6
IV.1.1. Représentation complexe d'une O.P.P.M.....	6
IV.1.2. Expression des opérateurs en fonction de k et de la pulsation.....	7
IV.1.3. Structure de l'O.P.P.M électromagnétique.....	7
IV.2. GENERALISATION A UNE O.P.P.....	8
IV.3. VITESSE DE PHASE-VITESSE DE GROUPE.....	8
V. ASPECT ENERGETIQUE DE L'ONDE ELECTROMAGNETIQUE.....	9
V.1. BILAN ENERGETIQUE LOCAL.....	9
V.2. VECTEUR DE POYNTING.....	10
VI. POLARISATION D'UNE O.P.P.M ELECTROMAGNETIQUE.....	11
VI.1. DEFINITION.....	11
VI.2. EXEMPLES D'ETATS DE POLARISATION.....	11
VII. REFLEXION D'UNE O.P.P.M SUR UN PLAN CONDUCTEUR.....	12
VII.1. CARACTERISTIQUES DE L'ONDE REFLECHIE.....	12
VII.1.1. Conditions aux limites.....	12
VII.1.2. Expressions des champs réfléchis et du courant surfacique induit.....	12
VII.2. APPARITION D'UNE ONDE STATIONNAIRE.....	13
VII.2.1. Structure de l'onde résultante stationnaire.....	13
VII.2.2. Aspect énergétique de l'onde stationnaire.....	13
VIII. RAYONNEMENT DIPOLAIRE.....	14
VIII.1. CADRE DE L'ETUDE.....	14
VIII.2. DETERMINATION DES CHAMPS.....	15
VIII.2.1. Expression générale.....	15

VIII.2.2. Expression à grande distance de l'origine 16
 VIII.2.3. Approximation locale par une onde plane 16
 VIII.3. ASPECT ENERGETIQUE 16
 VIII.3.1. Puissance rayonnée par un dipôle 16
 VIII.3.2. Cas d'un mouvement sinusoïdal 17

I. LES POSTULATS DE L'ELECTROMAGNETISME

I.1. LOI DE FORCE DE LORENTZ

• Dans un référentiel (R), on définit une entité physique (\vec{E}, \vec{B}) appelée « champ électromagnétique » telle qu'une particule (charge q, vitesse \vec{v}_R) qui s'y trouve placée subisse une force donnée par :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_R \wedge \vec{B})$$

• Le but de l'électromagnétisme est de déterminer ce champ à partir de la distribution de charges et de courants (ρ et \vec{j}) qui le crée.

I.2. LES EQUATIONS DE MAXWELL

A partir de résultats antérieurs (Gauss, Ampère, Faraday...) et de considérations personnelles, J.C Maxwell (1831-1879) a postulé les équations suivantes (publications de 1855 à 1864) :

* Equation de Maxwell-Gauss: $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{int}}/\epsilon_0$
 * Equation de Maxwell-flux: $\text{div}\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
 * Equation de Maxwell-Faraday: $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$
 * Equation de Maxwell-Ampère: $\text{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) \Leftrightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(i_e + \iint_S \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S})$

I.3. CONTENU PHYSIQUE DES EQUATIONS DE MAXWELL

I.3.1. Maxwell-Gauss (M.G)

• Les lignes du champ électrique peuvent diverger à partir de sources **ponctuelles** appelées **charges électriques** (= « monopôles » électriques).
 • Le théorème de Gauss est applicable en régime **non permanent** (ceci n'a rien d'immédiat lorsqu'on démontre le théorème à partir de la loi de Coulomb, cette dernière n'étant alors plus valable).

I.3.2. Maxwell-flux (M. Φ)

• Le flux magnétique est **CONSERVATIF** (ce flux à travers toute surface coupant un même tube de champ est conservé).
 • Les lignes de champ magnétique ne peuvent diverger à partir de sources ponctuelles : il n'existe **pas de monopôles magnétiques**.

I.3.3. Maxwell-Faraday (M.F)

Au même titre que des charges électriques, un champ magnétique variable dans le temps donne naissance à un champ électrique ; mais la **circulation** de ce champ induit est **non nulle** sur un **contour fermé** (phénomène d'induction).

1.3.4. Maxwell-Ampère (M.A)

• Au même titre que des courants de conduction (charges électriques en mouvement), un champ électrique non permanent engendre un champ magnétique (forme généralisée du **théorème d'Ampère**).

• Le terme $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est appelé « **courant de déplacement** » (traduction malheureuse de l'anglais, car il n'y a pas de déplacement de charges électriques...).

La démarche de Maxwell fut la suivante : pour tenir compte de la conservation de la charge, il introduisit un terme supplémentaire dans l'équation (M.A) initiale, soit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) \Rightarrow \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = 0 = \text{div} \vec{j} + \text{div} \vec{j}_D = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_D = -\frac{\partial(\epsilon_0 \text{div} \vec{E})}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_D \quad (\text{grâce à M.G})$$

Les variables de temps et d'espace étant indépendantes, on permute les opérateurs, d'où :

$\text{div}(\vec{j}_D - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$; des considérations de cohérence interne de la théorie électromagnétique (aspect énergétique en particulier) et des confirmations expérimentales ont permis à Maxwell de

retenir la solution la plus simple, soit : $\boxed{\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

1.4. RELATIONS DE PASSAGE

On considère deux milieux (1) et (2) dont la surface de séparation (sa normale locale $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ étant orientée de (1) vers (2)) est porteuse d'une distribution de charges (σ , en $C.m^{-2}$) et de courants (\vec{j}_S , en $A.m^{-1}$) **surfacciques** ; on a, juste de part et d'autre de la surface de séparation, les conditions aux limites suivantes :

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}} \quad \text{et :} \quad \boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}$$

Il y a donc **continuité** de la composante **tangentielle** de \vec{E} et de la composante **normale** de \vec{B}

II. EQUATIONS LIEES AUX POTENTIELS

II.1. CHAMPS EN FONCTION DES POTENTIELS

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

où \vec{A} est le « **potentiel-vecteur** » du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) et V son « **potentiel scalaire** ».

II.2. CHOIX D'UNE JAUGE

• Nous avons vu (chapitre 27) que le potentiel-vecteur $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f$ (où f est une fonction quelconque) donne le même champ que \vec{A} ; il en est de même pour $V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$ (il faut tenir

compte du couplage entre \vec{E} et \vec{B} désormais) vis-à-vis de \vec{E} .

• Faire le **choix** d'un couple de potentiels s'appelle « **choisir une JAUGE** » : nous allons en voir deux exemples après avoir établi les équations différentielles satisfaites par \vec{A} et V ; donc :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div}(-\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\Delta V - \frac{\partial(\text{div} \vec{A})}{\partial t} \Rightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\partial(\text{div} \vec{A})}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial(-\text{grad}V - \partial \vec{A} / \partial t)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \text{grad}(\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}) \quad (2)$$

• Les équations (1) et (2) sont **couplées** ; on peut faire les choix suivants :

♦ **jauge de Coulomb** : $\boxed{\text{div} \vec{A} = 0}$ $\Rightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$: c'est l'équation de Poisson, vue en

statique, dont on connaît la solution ; mais dans l'équation (2), \vec{A} et V restent **couplés**.

♦ **jauge de Lorentz** : $\boxed{\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$ \Rightarrow

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} &= \vec{0} \\ \Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} &= 0 \end{aligned} \quad (3) \text{ et } (4)$$

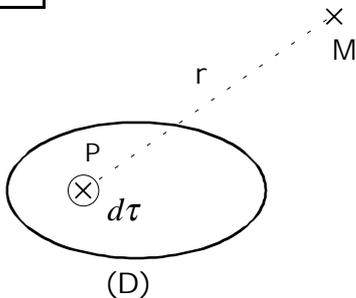
Les équations (3) et (4) sont alors **découplées** : les solutions sont connues sous le nom de « **potentiels retardés** ».

II.3. SOLUTION DES POTENTIELS RETARDES

On considère un domaine (D), porteur de charges et de courant électriques ; en posant

$$\boxed{c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

, les potentiels retardés sont donnés par :



$$\boxed{\begin{aligned} V(M, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(P, t-r/c)}{r} d\tau \\ \vec{A}(M, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{j}(P, t-r/c)}{r} d\tau \end{aligned}}$$

• On constate que les expressions de \vec{A} et V au point M, à l'instant t , dépendent de l'état des distributions de charges et de courants à l'instant **ANTERIEUR** $t-r/c$: ceci est compatible avec la Relativité Restreinte qui rejette la possibilité de propagation **instantanée** de phénomènes physiques (contrairement aux potentiels « coulombiens » ou « newtoniens ») ; la grandeur c apparaît ainsi comme une **vitesse de propagation** du champ électromagnétique mais nous reverrons cette notion plus loin.

• L'instant retardé $t-r/c$ dépend du point P d'intégration, ce qui rend les calculs encore plus délicats : dans le cadre du programme, nous n'aurons pas à faire de tels calculs et nous ne reparlerons des potentiels retardés qu'à propos du « **rayonnement dipolaire** ».

III. PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

III.1. APPROCHE QUALITATIVE

La possibilité de propagation d'une onde électromagnétique résulte du **couplage** des champs \vec{E} et \vec{B} dans les équations de Maxwell ; supposons qu'en un point apparaisse un champ \vec{E} : ce

champ n'existant pas auparavant, il y a donc un « $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ » \Rightarrow obtention d'un « $\vec{\text{rot}}\vec{B}$ » qui affecte le point considéré et son **voisinage** (par l'intermédiaire des dérivées spatiales) ; en ces points voisins, un champ magnétique est né, donc un « $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ » \Rightarrow génération d'un « $\vec{\text{rot}}\vec{E}$ » qui affecte le voisinage etc...Ainsi, de proche en proche, la perturbation initiale peut se propager sous forme d'un champ électromagnétique.

III.2. EQUATION DE PROPAGATION DANS LE VIDE

• Dans le **vide**, en l'absence de charges et de courants, les équations de Maxwell se simplifient et l'on peut écrire :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}}\vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial(\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})}{\partial t} = -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} ; \text{ d'où :}$$

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \text{De même :} \quad \boxed{\Delta\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

• On vérifiera qu'avec la jauge de Lorentz, les potentiels V et \vec{A} satisfont à la même équation ; cette équation aux dérivées partielles est du type :

$\Delta f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$; elle porte le nom de « **équation de propagation** » ou « **équation de d'Alembert** », où v est la « **célérité** » de l'onde.

• Dans le cas du champ électromagnétique, cette célérité v est égale à $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$. Des expériences

(en électrostatique et magnétostatique) avaient permis de mesurer ϵ_0 et μ_0 ; par ailleurs, on commençait à avoir une bonne précision sur la mesure de la vitesse de la lumière c (L.Foucault en 1850) : l'identité entre la célérité des ondes électromagnétiques et c (ainsi que d'autres considérations, sur la polarisation en particulier) a permis à Maxwell d'affirmer le **caractère électromagnétique de la lumière**. On retiendra donc :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}}$$

III.3. SOLUTIONS PARTICULIERES DE L'EQUATION DE D'ALEMBERT

III.3.1. Onde plane

• **Définition 1** : un phénomène physique, auquel on aura associé une ou plusieurs grandeurs mathématiques (élongation d'un point d'une corde, température, champ électrique ou magnétique...), qui dépend de **l'espace ET du temps**, sera appelé **onde**.

Définition 2 : une onde $f(x,t)$ est dite **PLANE** si, à tout instant, l'amplitude de f est constante sur tout plan perpendiculaire à une direction fixe.

Rq : en coordonnées cartésiennes, une onde plane ne dépendra que d'une variable d'espace.

• Sous forme d'onde plane, on montre que les solutions les plus générales de l'équation de d'Alembert sont de la forme :

$$f(x, t) = g(x - vt) + h(x + vt) \quad (\text{Ox étant la direction de propagation})$$

Rq1 : soit $g(0)$ l'amplitude de l'onde $g(x, t)$ en $x=0$ et à $t=0$; quel que soit x , il existe toujours un instant t tel que $x-vt=0 \Rightarrow$ l'amplitude de l'onde vaudra à nouveau $g(0)$ (en ce point d'abscisse x et à l'instant t) \Rightarrow la dépendance en $x \pm vt$ traduit une onde se propageant selon Ox **sans atténuation d'amplitude** : g et h sont dites « ondes planes **PROGRESSIVES** ».

Rq2 : $g(x, t)$ est une onde progressive se propageant à la vitesse v selon les x croissants, $h(x, t)$ se propage quant à elle selon les x décroissants.

Rq3 : si la direction de propagation ne coïncide plus avec l'un des trois axes du repère cartésien d'étude, alors on écrira :

$$f(\vec{r}, t) = g(\vec{r} \cdot \vec{n} - vt) + h(\vec{r} \cdot \vec{n} + vt) \quad (\text{où } \vec{n} \text{ est un vecteur unitaire de la direction de propagation}).$$

Rq4 : à l'opposé, on appellera « **onde STATIONNAIRE** » une onde où les variables de temps et d'espace seront **séparées**, c'est-à-dire telle que : $f(\vec{r}, t) = g(\vec{r}) \times h(t)$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$; O=origine) (pour des points tels que $g(\vec{r})=0$, l'amplitude de l'onde stationnaire sera nulle quel que soit t : il n'y a plus propagation de cette amplitude).

III.3.2. Onde sphérique

• **Définition** : une onde f est dite « **sphérique** » si, à un instant t fixé, l'amplitude de f est constante sur une sphère quelconque (centrée sur un point O pris comme origine) ; on peut donc écrire : $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$ avec : $r = \|\overrightarrow{OM}\|$

• Une onde sphérique vérifiant l'équation de d'Alembert sera telle que :

$$f(r, t) = \frac{1}{r} \times g(r - vt) + \frac{1}{r} \times h(r + vt)$$

Rq1 : g est une onde sphérique **divergente** (à partir de O), h une onde **convergente** (vers O).

Rq2 : contrairement à une onde plane, une onde sphérique se propage en **s'atténuant** (donc en se **déformant**) ; nous verrons que cette atténuation de l'**amplitude** ne traduit pas une absorption du milieu (ici, ce serait le vide...), mais correspond au contraire à la conservation de l'**énergie**.

IV. ONDE PLANE PROGRESSIVE ELECTROMAGNETIQUE

IV.1. CAS PARTICULIER D'UNE ONDE MONOCHROMATIQUE

IV.1.1. Représentation complexe d'une O.P.P.M

• Considérons un champ électrique de type O.P.P.M ou O.P.P.H (« onde plane progressive monochromatique ou harmonique ») se propageant selon Ox ; on pourra écrire :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kx + \varphi_x) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{cases}$$

En injectant cette expression dans l'équation de d'Alembert, il vient, selon Ox par exemple :

$$-k^2 E_x + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) E_x = 0 \quad \forall E_x \Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} = \text{« relation de dispersion »}$$

Rq1 : on a donc une double périodicité : * temporelle : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (période en s)

* spatiale : $\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$ (longueur d'onde en m)

Rq2 : k correspond à une « pulsation spatiale » (en m^{-1}): la grandeur $\vec{k} = k\vec{e}_x$ est appelée « **VECTEUR D'ONDE** ».

Rq3 : pour une onde se propageant selon une direction de vecteur unitaire \vec{u} , on aura :

$$\vec{k} = k\vec{u} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z \quad \text{et pour la composante selon Ox : } E_x = E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x)$$

• Nous allons donner une représentation complexe de \vec{E} :

$$\vec{E} = \begin{cases} \underline{E}_x = \underline{E}_{0x} \exp[i(\omega t - kx)] \\ \underline{E}_y = \underline{E}_{0y} \exp[i(\omega t - kx)] \\ \underline{E}_z = \underline{E}_{0z} \exp[i(\omega t - kx)] \end{cases} \quad \text{avec : } \begin{cases} \underline{E}_x = E_{0x} \exp(i\varphi_x) \\ \underline{E}_y = E_{0y} \exp(i\varphi_y) \\ \underline{E}_z = E_{0z} \exp(i\varphi_z) \end{cases} \quad \text{et : } \vec{E} = \Re\{\vec{E}\}$$

IV.1.2. Expression des opérateurs en fonction de k et de la pulsation

• On remarque que l'opérateur symbolique « nabla » (à n'utiliser qu'en coordonnées cartésiennes) appliqué au champ complexe \vec{E} s'écrit :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ik \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -ik\vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \leftrightarrow -ik \quad \text{De même : } \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega$$

Rq : bien entendu, avec une convention en $\exp[i(kx - \omega t)]$, on aurait $\vec{\nabla} \leftrightarrow i\vec{k}$ et $\partial/\partial t \leftrightarrow -i\omega$.

• dans ces conditions, il vient :

$$\text{div} \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}; \quad \text{rot} \vec{E} = -i\vec{k} \wedge \vec{E}; \quad \Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}$$

IV.1.3. Structure de l'O.P.P.M électromagnétique

• Nous pouvons maintenant appliquer les résultats précédents aux équations de Maxwell :

♦ M.G : $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$ (5)

♦ M.flux : $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}$ (6)

♦ M.F : $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}$ (7) avec : $\vec{k} = k\vec{u}$

• Les relations (1) et (2) montrent qu'une onde **plane** électromagnétique dans le vide a une **structure « TRANSVERSE »**. La relation (3), appelée « **relation de structure** » d'une O.P.P

électromagnétique, nous indique que $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un **trièdre DIRECT** ; de plus, elle montre

que \vec{E} et \vec{B} sont **en phase** et que : $\boxed{\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}}$ (8)

Rq1 : la relation (8) montre que pour une particule de charge q **non relativiste**, placée dans un champ électromagnétique, on pourra négliger l'aspect magnétique de la force de Lorentz devant

l'aspect électrique ; en effet : $\|q(\vec{v} \wedge \vec{B})\| \leq q\|\vec{v}\| \times \|\vec{B}\| = q\|\vec{v}\| \times \frac{\|\vec{E}\|}{c} \ll q\|\vec{E}\|$ (où v est la vitesse de q).

Rq2 : l'équation de Maxwell-Ampère fournit une relation analogue à la (7).

IV.2. GENERALISATION A UNE O.P.P

Toute O.P.P pourra être considérée comme une **superposition** d'O.P.P.M de pulsations ω différentes, mais de direction \vec{u} et de célérité c dans le vide **communes** ; en notant \vec{E}_i

l'harmonique de rang i du champ électrique \vec{E} et \vec{B}_i l'harmonique correspondant du champ magnétique \vec{B} , on pourra écrire : $\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i = \sum_i \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}_i = \frac{\vec{u}}{c} \wedge (\sum_i \vec{E}_i) = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E} \Rightarrow$

les relations (1),(2),(3) et (4) s'appliquent à toute O.P.P électromagnétique dans le vide

IV.3. VITESSE DE PHASE-VITESSE DE GROUPE

• **Vitesse de phase** : dire que la phase d'une O.P.P.M s'est propagée d'une abscisse x (à l'instant t) vers l'abscisse $x+dx$ (à l'instant $t+dt$) revient à écrire :

$\omega t - kx = \omega(t + dt) - k(x + dx) \Rightarrow \omega dt = k dx$; cette phase s'est donc propagée à une vitesse dx/dt

appelée « vitesse de phase », notée v_ϕ , telle que : $\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k}}$

Rq1 : cette définition est purement mathématique, la vitesse de phase d'une O.P.P.M pourra donc être supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide c .

Rq2 : un milieu (ou un mode de propagation : « libre », « guidée »...) où cette vitesse de phase dépendra de la pulsation sera dit « **DISPERSIF** » : dans une telle situation, les composantes harmoniques d'un groupe d'ondes de fréquences différentes se propageront à des vitesses différentes, le groupe va se « déformer », se « disperser ».

On reconnaîtra un milieu **non dispersif** au fait que la « relation de dispersion » (c'est-à-dire la fonction $k = f(\omega)$) est de type **LINEAIRE**.

• **Vitesse de groupe** : nous signalerons dans le paragraphe V, consacré à l'aspect énergétique, qu'une O.P.P.M ne peut décrire parfaitement une onde physique ; comme nous venons de le voir, cette dernière pourra être considérée comme la superposition d'O.P.P.M de pulsations différentes communément appelée « **PAQUET D'ONDES** ».

Prenons l'exemple très simple d'un paquet de 2 ondes de même amplitude, soit :

$$f(x, t) = a \cos(\omega_1 t - k_1 x) + a \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad \text{avec : } \omega_1 \ll \omega_2$$

$$\text{Posons également : } k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}; \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \Delta k = k_2 - k_1; \Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_0$$

$$\text{Il vient alors : } f(x, t) = 2a \cos\left(\frac{\Delta \omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right) \cos(\omega_0 t - k_0 x)$$

L'onde de pulsation la **plus élevée** (soit ω_0) est appelée « **onde moyenne** » (en modulation d'amplitude, on parle d'onde « porteuse ») voit son amplitude modulée dans le temps par l'onde de pulsation la **moins élevée**, appelée « **onde enveloppe** » (ou « modulatrice ») : l'onde moyenne se propage à la vitesse de phase $\frac{\omega_0}{k_0}$ alors que l'onde enveloppe (c'est-à-dire la « crête » de l'onde moyenne) se propage à la vitesse $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$.

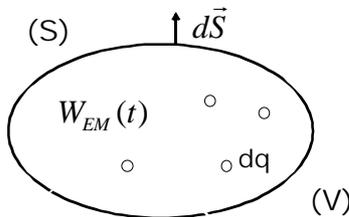
Nous savons déjà que la densité volumique d'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude des champs \vec{E} et \vec{B} : cette énergie étant la **plus dense** sous les **maximums** de l'enveloppe, elle peut (en moyenne) se propager à la vitesse de l'enveloppe, appelée « **vitesse de groupe** ». Ce lien entre vitesse de groupe et vitesse de l'énergie est loin d'être systématique : ainsi, pour des milieux trop dispersifs, l'énergie du groupe de trouve vite délocalisée dans l'espace et le paquet devient très « étalé », on ne peut plus relier de manière simple les deux vitesses (à cet égard, il est fortement conseillé de **résoudre l'exercice 29.3**, où les vitesses de groupe et de l'énergie sont égales, mais calculées de manière indépendante : on retiendra bien la méthode générale de calcul de la vitesse de l'énergie).

En généralisant l'expression de la « vitesse de crête » ou « vitesse de groupe » (notée v_G) vue ci-dessus à des paquets plus complexes, on pose :

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{cette vitesse ne pourra être supérieure à } c)$$

V. ASPECT ENERGETIQUE DE L'ONDE ELECTROMAGNETIQUE

V.1. BILAN ENERGETIQUE LOCAL



On considère un volume de contrôle (V), limité par une surface de contrôle (S), orientée vers l'extérieur. Ce volume renferme des charges mobiles et de l'énergie électromagnétique.

- Nous allons faire un bilan sur la grandeur $W_{EM}(t)$ en nous intéressant à sa **diminution** temporelle :

$$-\frac{dW_{EM}(t)}{dt} = P_{\text{rayonnée}} + P_{\text{cédée à la matière}} \quad (P_{\text{rayonnée}} = \text{puissance sortant à travers la surface (S)})$$

- La force exercée par le champ électromagnétique sur la charge dq , contenue dans un volume $d\tau$, s'écrira : $d\vec{F} = \rho_{mob} d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ où ρ_{mob} est la densité volumique des charges mobiles et \vec{v} la vitesse des charges mobiles contenues dans $d\tau$; on peut alors calculer la puissance élémentaire cédée par le champ aux charges dq , soit :

$$dP = \rho_{mob} d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = \rho_{mob} d\tau \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \Rightarrow P_{\text{cédée à la matière}} = \iiint_V (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau$$

Rq : dans un **milieu ohmique** de conductivité γ , on a la relation supplémentaire : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, ce

qui nous donne les pertes volumiques par **effet Joule** : $\frac{dP_J}{d\tau} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}$ (en $W.m^{-3}$)

- La puissance rayonnée, grandeur scalaire, peut être considérée comme le flux d'une grandeur vectorielle $\vec{\Pi}$ représentant la densité surfacique de cette puissance (en $W.m^{-2}$) ; il vient :

$$P_{\text{rayonnée}} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{\Pi} \times d\tau \quad (\text{par application du théorème de Green-Ostrogradski})$$

- Enfin, on peut écrire :

$$W_{EM}(t) = \iiint_V w_{EM}(\vec{r}, t) d\tau \Rightarrow \frac{dW_{EM}(t)}{dt} = \frac{d(\iiint_V w_{EM}(\vec{r}, t) d\tau)}{dt} = \iiint_V \frac{\partial w_{EM}(\vec{r}, t)}{\partial t} d\tau, \text{ où } w_{EM}(\vec{r}, t) \text{ est la}$$

densité volumique d'énergie électromagnétique (en $W.m^{-3}$) ; le bilan énergétique devient :

$$\iiint_V -\frac{\partial w_{EM}(\vec{r}, t)}{\partial t} d\tau = \iiint_V \text{div} \vec{\Pi} \times d\tau + \iiint_V (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau, \text{ relation vraie quel que soit le volume (V) ; on}$$

obtient alors « **l'équation LOCALE de conservation de l'énergie électromagnétique** » :

$$-\frac{\partial w_{EM}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (9)$$

V.2. VECTEUR DE POYNTING

- On connaît l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$w_{EM} = w_E + w_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- La grandeur $\vec{\Pi}$ est appelée « **vecteur de Poynting** » ; en combinant les équations de Maxwell et la relation (9), on trouve une expression de $\vec{\Pi}$ confirmée par l'expérience :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (\text{en } W.m^{-2})$$

- **Théorème de Poynting** : la puissance électromagnétique traversant une surface orientée (S) quelconque peut se calculer par :

$$P_{EM} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Rq1 : $\vec{\Pi}$ n'est **pas** une fonction **linéaire** de \vec{E} et $\vec{B} \Rightarrow$ si l'on travaille en complexes, il faut repasser par les expressions **réelles** des champs **AVANT** de calculer $\vec{\Pi}$.

Rq2 : très souvent, c'est la valeur moyenne temporelle de $\vec{\Pi}$ qui nous intéresse ; il peut être commode d'utiliser la « recette » suivante:

$$\langle \vec{\Pi}(\vec{r}, t) \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right\} \quad (\text{où } \vec{B}^* \text{ est le conjugué de } \vec{B})$$

Rq3 : pour une **O.P.P**, le vecteur $\vec{\Pi}$ est constant sur un plan illimité \Rightarrow son intégration sur ce plan conduirait à une puissance transportée **infinie** : **une O.P.P n'a pas de réalité physique**, elle ne peut **modéliser** correctement une onde réelle que sur une **portion d'espace finie**.

VI. POLARISATION D'UNE O.P.P.M ELECTROMAGNETIQUE

VI.1. DEFINITION

On dit qu'une O.P.P.M présente un « état de polarisation » (ou bien « est polarisée ») si, lorsqu'on regarde face à la direction de propagation, l'extrémité du vecteur champ électrique (ou magnétique) décrit une **courbe fermée**.

VI.2. EXEMPLES D'ETATS DE POLARISATION

- Considérons une O.P.P.M se propageant selon la direction Ox :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx - \varphi) \end{cases} \quad \text{Pour simplifier les calculs, on se place dans le plan } x=0 \text{ ; donc :}$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos \omega t; \quad \frac{E_z}{E_{0z}} = \cos \omega t \times \cos \varphi + \sin \omega t \times \sin \varphi \Rightarrow \begin{cases} \sin \omega t \times \sin \varphi = \frac{E_z}{E_{0z}} - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \varphi \\ \cos \omega t \times \sin \varphi = \frac{E_y}{E_{0y}} \sin \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}} \right)^2 - 2 \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right) \times \left(\frac{E_z}{E_{0z}} \right) \cos \varphi \right] = \sin^2 \varphi$$

\Rightarrow l'extrémité du vecteur \vec{E} , dans le cas d'une O.P.P.M électromagnétique, décrit une **ELLIPSE** : pour une telle onde, la polarisation la plus générale est donc de type **ELLIPTIQUE**.

Rq : si pour un observateur placé **FACE** à la direction de propagation, l'ellipse est décrite dans le sens **TRIGO**, la polarisation est dite elliptique « **GAUCHE** » ; pour un sens de parcours **HORAIRE**, la polarisation est elliptique « **DROITE** ».

- **Cas particuliers** :

♦ $\varphi = 0 \text{ ou } \pi$: on a alors $\frac{E_z}{E_y} = \pm \frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \text{cste} \Rightarrow$ la polarisation est **RECTILIGNE**.

♦ $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$: il vient $\left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}} \right)^2 = 1$; c'est l'équation d'une ellipse d'axes Oy et Oz

Si de plus $E_{0y} = E_{0z}$: la polarisation est **CIRCULAIRE** (droite ou gauche).

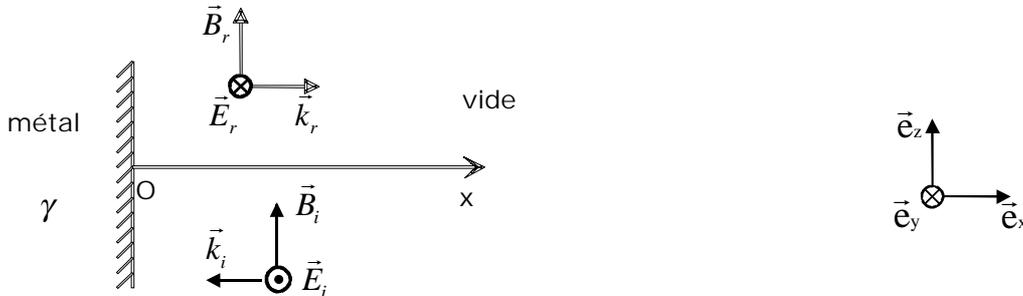
Rq : dans les chapitres 30 et 33, nous verrons que la lumière « naturelle » (Soleil, sources usuelles...) est composée de « trains d'ondes » de durée finie (et non d'ondes illimitées dans le temps et l'espace) : chaque train d'onde est polarisé elliptiquement (à priori), mais d'un train d'onde à l'autre, les axes de l'ellipse varient de manière **aléatoire**. Puisque sur une durée de 0,1 seconde (durée de la persistance rétinienne), nous recevons un très grand nombre de ces trains d'ondes, on dit que la lumière naturelle est **non polarisée** : nous étudierons des dispositifs permettant de la polariser.

VII. REFLEXION D'UNE O.P.P.M SUR UN PLAN CONDUCTEUR

VII.1. CARACTERISTIQUES DE L'ONDE REFLECHIE

VII.1.1. Conditions aux limites

- On considère une O.P.P.M, de polarisation rectiligne, se propageant selon l'axe Ox, **perpendiculairement** à un plan métallique de conductivité γ , d'abscisse $x=0$.



- Nous avons, en tenant compte de la relation de structure des O.P.P.M et du sens de propagation négatif de l'onde :

$$\vec{E}_i = \begin{cases} E_{x_i} = 0 \\ E_{y_i} = -E_0 \cos(\omega t + kx) \\ E_{z_i} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \begin{cases} B_{x_i} = 0 \\ B_{y_i} = 0 \\ B_{z_i} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \end{cases}$$

- Le champ électrique incident va mettre en mouvement les électrons libres du métal et engendrer des courants induits : ce sont eux qui seront à l'origine d'une **onde retour**. Obéissant à la loi de Lenz, ils vont s'opposer à la cause qui leur a donné naissance (les variations temporelles du champ incident) : dans le métal, ils vont tendre à empêcher toute propagation d'une onde électromagnétique. Dans l'exercice 29.2, nous verrons que l'onde ne peut y pénétrer

que sur une distance de l'ordre de $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ (= « épaisseur de peau ») : dans le cuivre et

pour une fréquence de 50MHz, $\delta \approx 10 \mu m$. Avec le **modèle** du « métal parfait », où $\gamma \rightarrow \infty$,

$\delta \rightarrow 0$: pour ce cas **idéalisé**, nous considérerons que **dans le métal** : $\boxed{\vec{E} = \vec{B} = \vec{j} = \vec{0}}$.

Les courants ne pourront donc qu'être **superficiels**.

- Les relations de passage du I.4 vont donc se simplifier en :

$$\boxed{\vec{E}_{vide} - \vec{0} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}_{vide} - \vec{0} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_x} \quad (\vec{E}_r \text{ et } \vec{B}_r \text{ sont les champs réfléchis})$$

VII.1.2. Expressions des champs réfléchis et du courant surfacique induit

- Nous postulons que l'onde retour a également une **structure D'O.P.P.M** ; la **linéarité** des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm fait que la **pulsation** de l'onde retour est **la même** que celle de l'onde incidente.

Par ailleurs, le plan xOz est plan d'anti-symétrie du champ électrique incident, donc des courants surfaciques induits : le champ électrique réfléchi (qui en est un effet) sera perpendiculaire à ce plan, donc porté par \vec{e}_y et le champ magnétique sera perpendiculaire au plan de symétrie xOy,

donc porté par \vec{e}_z ; la structure de l'O.P.P.M nous donne un vecteur d'onde retour \vec{k}_r , dirigé selon \vec{e}_x et de module égal à k (puisque l'on reste dans le vide, la relation $k = \omega/c$ est encore valable).

Rq : il est conseillé de faire l'exercice 29.5 où les résultats précédents sont démontrés de manière plus « calculatoire », pour une incidence **oblique** de l'O.P.P.M sur le plan conducteur.

- Il vient donc en $x=0$: $(E_i + E_r)\vec{e}_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_x \Rightarrow E_r(x=0,t) = -E_i(x=0,t)$; alors :

$$\boxed{\vec{E}_r(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_y} \quad (\text{en tenant compte du sens positif de propagation de l'onde retour})$$

$$\boxed{\vec{B}_r(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx)\vec{e}_z} \quad (\text{en utilisant la relation de structure des O.P.P.M, avec } \vec{k}_r = k\vec{e}_x)$$

Enfin, la relation de passage sur \vec{B} en $x=0$ nous donne :

$$\boxed{\vec{j}_s = -\frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t)\vec{e}_y}$$

VII.2. APPARITION D'UNE ONDE STATIONNAIRE

VII.2.1. Structure de l'onde résultante stationnaire

- Nous allons nous intéresser à la superposition des ondes incidente et réfléchi (pour $x>0$) :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = [-E_0 \cos(\omega t + kx) + E_0 \cos(\omega t - kx)]\vec{e}_y \Rightarrow \boxed{\vec{E} = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t)\vec{e}_y}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \left[\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \right] \vec{e}_z \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t)\vec{e}_z}$$

\Rightarrow l'onde résultante est bien une onde **stationnaire** (séparation des variables x et t).

- Les caractéristiques principales de cette onde sont les suivantes :

- ♦ **Nœuds du champ électrique** : $\sin(kx) = 0 \Rightarrow \boxed{x = p \frac{\pi}{k} = p \frac{\lambda}{2}} \quad (p \in \mathbb{N})$

- ♦ **Ventres du champ électrique** : $\sin(kx) = \pm 1 \Rightarrow \boxed{x = (p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2}}$

- ♦ Les champs \vec{E} et \vec{B} sont en **QUADRATURE** spatiale et temporelle : les nœuds de \vec{B} coïncident avec les ventres de \vec{E} et réciproquement.

- ♦ Entre 2 nœuds consécutifs, le champ \vec{E} (ou le champ \vec{B}) vibre « en phase » (i.e la phase garde un signe constant entre ces 2 nœuds), alors qu'il y a « opposition de phase » de part et d'autre d'un nœud.

VII.2.2. Aspect énergétique de l'onde stationnaire

- $w_{EM}(x,t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(x,t) + \frac{B^2(x,t)}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \times 4E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kx) + \frac{4E_0^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) \cos^2(kx) \Rightarrow$

$$w_{EM}(x,t) = 2\epsilon_0 E_0^2 [\sin^2(\omega t) \sin^2(kx) + \cos^2(\omega t) \cos^2(kx)] ; \text{ or : } \langle \sin^2(\omega t) \rangle_t = \langle \cos^2(\omega t) \rangle_t = 1/2 \Rightarrow$$

$$\langle w_{EM}(x,t) \rangle_t = 2\epsilon_0 E_0^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2(kx) + \frac{1}{2} \cos^2(kx) \right] \Rightarrow \boxed{\langle w_{EM}(x,t) \rangle_t = \epsilon_0 E_0^2} \quad (\text{ne dépend pas de } x)$$

$$\bullet \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \wedge & 0 \\ 0 & 2(E_0/c) \cos(\omega t) \cos(kx) \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2\omega t) \sin(2kx) \vec{e}_x}$$

Rq1 : le vecteur de Poynting est dirigé selon Ox et s'annule aux nœuds de \vec{E} ET de \vec{B} (« **plans nodaux** ») : à tout instant, la puissance électromagnétique qui traverse ces plans est nulle, l'énergie reste **CONFINEE** entre 2 plans nodaux consécutifs.

Rq2 : de plus, puisque $\langle \sin(2\omega t) \rangle_t = 0$, la **moyenne temporelle** de $\vec{\Pi}$ est **NULLE** en tout point.

VIII. RAYONNEMENT DIPOLAIRE

VIII.1. CADRE DE L'ETUDE

• On considère un ensemble de charges q_i , telles que $\sum_i q_i = 0$, **mobiles** au voisinage de

l'origine O d'un système de coordonnées ; on posera : $\boxed{\vec{p} = \sum_i q_i \vec{OA}_i}$ = « moment dipolaire » de

la distribution de charges.

On souhaite déterminer les champs \vec{E} et \vec{B} à **GRANDE DISTANCE** r de O et montrer que ce système **rayonne de l'énergie**, contrairement à un dipôle statique.

Rq : le programme officiel est très clair : « la connaissance et la démonstration des résultats n'est pas exigible mais la **succession des approximations** qui y conduisent doit être connue ».

• **Hypothèses simplificatrices** :

♦ $\boxed{r \gg a}$ (α) : a est l'ordre de grandeur de l'extension spatiale de la distribution.

♦ $\boxed{v_i \ll c}$ (β) : v_i est la vitesse de la particule **non-relativiste** q_i .

Rq : dans le cas d'un « **dipôle oscillant** », on peut considérer qu'une charge négative totale (-q) est fixe en O et qu'une charge positive totale (+q) est animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de la forme : $z(t) = a \cos(\omega t)$; il vient :

$$dz/dt = -\omega a \sin(\omega t) \Rightarrow (dz/dt)_{\max} = \omega a. \text{ La condition } (\beta) \text{ s'écrit alors : } \omega a \ll c = \lambda f = \lambda \omega / 2\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{a \ll \lambda} (\beta)_{\text{bis}}$$

On a donc 3 échelles de longueur : la dimension de la distribution (a), la longueur d'onde rayonnée (λ) et la distance à laquelle on calcule les champs (r) ; on a déjà comparé λ et r à a, il reste à comparer λ à r.

• Il faut appliquer la solution des potentiels retardés à des charges ponctuelles (« formules de Lienard et Wiechert »), où apparaîtront les instants retardés : $t'_i = t - r_i/c$. Les hypothèses (α) et (β) vont alléger les calculs :

♦ (α) permet de remplacer les instants retardés t'_i par un instant retardé **moyen** t' :

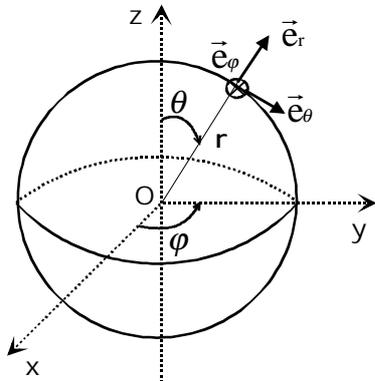
$\boxed{t' = t - r/c}$ (r représente une distance « moyenne » du dipôle au point où l'on calcule le champ).

♦ (β) permet de développer l'expression de $\vec{A}(M, t)$ en négligeant les termes en v_i/c .

Après calculs, on obtient : $\boxed{\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \times \frac{d\vec{p}(t')}{dt'}}$ avec : $\boxed{\vec{p}(t') = \sum_i q_i \vec{OA}_i(t')}$

VIII.2. DETERMINATION DES CHAMPS

VIII.2.1. Expression générale



On travaille en coordonnées **sphériques**

On fait le choix: $\vec{p} = p(t')\vec{e}_z$

On écrit: $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$ et: $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

- Après « quelques » calculs, les expressions suivantes sont obtenues :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \begin{cases} B_r = 0 \\ B_\theta = 0 \\ B_\phi = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi} \left(\frac{dp/dt'}{r^2} + \frac{d^2p/dt'^2}{rc} \right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} E_r = \frac{2\cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p}{r^3} + \frac{dp/dt'}{r^2c} \right) \\ E_\theta = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p}{r^3} + \frac{dp/dt'}{r^2c} + \frac{d^2p/dt'^2}{rc^2} \right) \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

Rq1 : l'invariance par rotation autour de l'axe Oz permettait de prévoir que les champs ne dépendraient pas de la variable ϕ .

Rq2 : de même, le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ étant plan de symétrie du dipôle, on pouvait se douter que \vec{E} appartiendrait à ce plan, donc que E_ϕ serait nul ; enfin, le champ \vec{B} devant être perpendiculaire à ce plan, il était prévisible que $B_r = B_\theta = 0$.

- Considérons un dipôle oscillant :
$$\begin{cases} p(t') = p_0 \cos(\omega t') \Rightarrow \text{amplitude} = p_0 \\ dp/dt' = -p_0\omega \sin(\omega t') \Rightarrow \text{amplitude} = \omega p_0 \\ d^2p/dt'^2 = -p_0\omega^2 \cos(\omega t') \Rightarrow \text{amplitude} = \omega^2 p_0 \end{cases}$$

Par ailleurs : $\omega/c = 2\pi/\lambda \Rightarrow$ on peut en déduire l'amplitude des différents termes présents dans

les composantes des champs :

$$\begin{cases} \frac{p}{r^3} : \text{amplitude} = \frac{p_0}{r^3} \\ \frac{dp/dt'}{r^2c} : \text{amplitude} = 2\pi \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda} \right) \\ \frac{d^2p/dt'^2}{rc^2} : \text{amplitude} = 4\pi^2 \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 \end{cases}$$

- On peut donc distinguer 2 zones principales :

- ♦ $r \ll \lambda$: le terme en $p(t')$ est **prépondérant** et l'on retrouve les composantes d'un champ électrique créé par un dipôle **STATIQUE** (composantes qui décroissent en $1/r^3$) ; le champ magnétique, quant à lui, est **NUL** : le vecteur de Poynting sera donc également nul dans cette zone où il n'y aura **pas de propagation de l'énergie**.

♦ $r \gg \lambda$: ce sont les termes en $d^2 p / dt^2$ qui l'emportent et, dans cette zone, les champs décroissent en $1/r$.

VIII.2.2. Expression à grande distance de l'origine

Pour $r \gg \lambda$, le produit vectoriel des deux champs est non nul : le vecteur de Poynting est différent de zéro et il y a propagation de l'énergie ; cette région est appelée « **zone de RAYONNEMENT** » ; après simplification, il vient :

$$\vec{p}(t') = p(t')\vec{e}_z ; \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 (d^2 p / dt^2) \sin \theta}{4\pi r} \vec{e}_\theta ; \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 (d^2 p / dt^2) \sin \theta}{4\pi r c} \vec{e}_\varphi$$

VIII.2.3. Approximation locale par une onde plane

• Dans la zone de rayonnement, on constate que \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires à \vec{e}_r et que :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

• On obtient une relation de structure similaire à celle d'une O.P.P ; cependant, si l'on se place dans un plan perpendiculaire à \vec{e}_r , l'amplitude des champs n'est pas constante, puisque r et θ varient. Mais si l'on « explore » le plan sur une distance faible par rapport à r , les variations de r et θ seront négligeables : on dit que le champ de rayonnement d'un dipôle électrique a une « structure LOCALE d'onde plane progressive ».

Rq : une antenne émettrice (radio, TV) peut être constituée d'une tige métallique (cations fixes et électrons mobiles) parcourue par un courant de haute fréquence : on l'assimilera à un dipôle oscillant (le barycentre des charges négatives se déplaçant par rapport au barycentre des charges positives).

♦ **modulation d'amplitude** : λ est de l'ordre du km, on a bien $\lambda \gg a$ (= dimension de l'antenne), mais ce n'est qu'à partir de quelques dizaines de km de la source que l'on sera dans la zone de rayonnement et que le champ aura une structure locale d'onde plane.

♦ **modulation de fréquence** : λ est de l'ordre du mètre \Rightarrow on est vite dans la zone de rayonnement (quelques 100 mètres), mais l'inégalité $\lambda \gg a$ n'est plus vérifiée : les électrons de l'antenne n'oscillent plus « en bloc » et il faut décomposer l'antenne en plusieurs dipôles oscillants déphasés les uns par rapport aux autres, ce qui complique les calculs.

VIII.3. ASPECT ENERGETIQUE

VIII.3.1. Puissance rayonnée par un dipôle

• Calculons le vecteur de Poynting dans la zone de rayonnement :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 (d^2 p / dt^2)^2}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2(\theta) \vec{e}_r$$

Rq1 : le vecteur de Poynting est donc radial et nous indique la direction locale de propagation de l'énergie.

Rq2 : la dépendance en θ traduit le caractère **ANISOTROPE** de l'émission d'un dipôle ; cette émission est **DIRECTIVE** et présente un **maximum** dans la direction perpendiculaire à l'axe du dipôle, soit : $\theta = \pi / 2$

Rq3 : si l'on trace, en polaire, le lieu des points $M(r, \theta)$ tels que : $\vec{OM} = \frac{\|\vec{\Pi}\|}{\|\vec{\Pi}_{\max}\|} \vec{e}_r$, on obtient « l'indicatrice de rayonnement » qui nous renseigne sur le caractère plus ou moins directif de l'antenne utilisée (dans notre modèle simple : $OM = \sin^2(\theta)$).

• **Calcul de la puissance rayonnée** : nous allons déterminer le flux du vecteur de Poynting à travers une sphère de rayon r ; comme $\vec{\Pi}$ dépend de θ , l'élément de surface « découpé » sur la sphère sera : $d\vec{S} = 2\pi r^2 \sin(\theta) d\theta \vec{e}_r$; il vient alors :

$$P_{ray} = \int_0^\pi \frac{\mu_0 (d^2 p / dt^2)^2 \sin^2(\theta)}{16\pi^2 r^2 c} \times 2\pi r^2 \sin(\theta) d\theta \quad \text{avec: } \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = 4/3 \Rightarrow \boxed{P_{ray} = \frac{\mu_0 (d^2 p / dt^2)^2}{6\pi c}}$$

Rq1 : on constate que P_{ray} ne dépend pas de r : ceci est cohérent avec le fait que le champ créé par le dipôle se propage dans un milieu **non absorbant** (il est finalement logique que l'amplitude des champs décroisse en $1/r$: le vecteur de Poynting, quadratique par rapport aux champs, sera en $1/r^2$ et, multiplié par un élément de surface proportionnel à r^2 , donnera une puissance constante sur une sphère de rayon r quelconque).

Rq2 : nous nous sommes intéressés à l'émission d'un dipôle, mais l'hypothèse « $\sum_i q_i = 0$ » n'a pas été utilisée dans la succession des calculs : ainsi, **toute particule accélérée rayonne de l'énergie** (« rayonnement synchrotron » dans les accélérateurs de particules, mouvement des électrons autour du noyau...).

VIII.3.2. Cas d'un mouvement sinusoïdal

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t) \Rightarrow d^2 p / dt^2 = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t) \Rightarrow (d^2 p / dt^2)^2 = \omega^4 p_0^2 \cos^2(\omega t) \Rightarrow \left\langle (d^2 p / dt^2)^2 \right\rangle_t = \frac{\omega^4 p_0^2}{2}$$

Il vient alors :

$$\boxed{\langle P_{ray} \rangle_t = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} = \frac{4\pi^3 \mu_0 c^3 p_0^2}{3\lambda^4}}$$

Rq1 : le rayonnement dipolaire est donc beaucoup **plus énergétique** dans les **courtes longueurs d'onde** (bleu-violet).

Ainsi, les molécules de l'atmosphère se comportent comme des dipôles excités par le champ électromagnétique émis par le Soleil : elles vont « **diffuser** » ce rayonnement solaire et donner la **couleur bleue du « ciel »** (sauf lorsque l'on regarde dans la direction du Soleil et que l'on reçoit de la lumière « directe » dominée par le jaune).

Au Soleil couchant ou levant, la lumière directe va traverser une grande épaisseur d'atmosphère : les molécules vont diffuser ce rayonnement (toujours en privilégiant le bleu) dans **toutes les directions** (en particulier latéralement par rapport à la direction d'observation) ; nous percevons donc une lumière « **épurée** » en bleu, donc tirant de plus en plus **vers le rouge** au fur et à mesure que le Soleil descend sur l'horizon.

Rq2 : il est impératif, pour la suite du cours, de savoir que le « visible » s'étend de :

$$\boxed{\lambda_V \approx 0,4 \mu m \text{ (pour le violet) à } \lambda_R \approx 0,75 \mu m \text{ (pour le rouge)}} \quad \text{et :}$$

$$\boxed{f_R \approx 4.10^{14} \text{ Hz} ; f_V \approx 7,5.10^{14} \text{ Hz}}$$